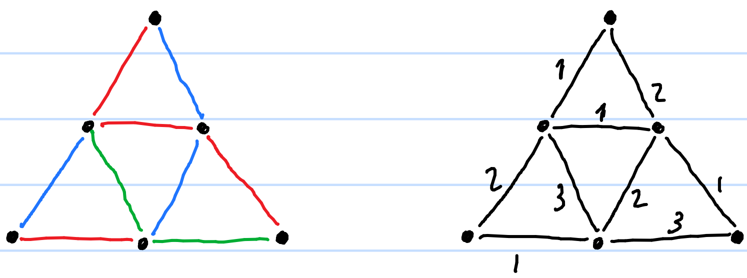
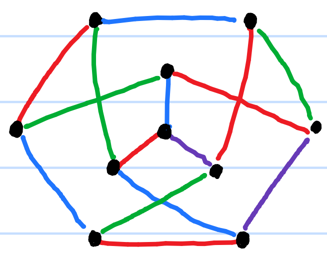
Teoria de Ramsey

- Nesta aula vamos estudar k-colorações (ñ necessariamente próprias) de um grafo completo.

- Dado um $k \in \mathbb{N}$, uma <u>k-coloração (de arestas)</u> de um grafo G é a atribuição das cores de um conjunto contendo k cores às arestas de G. Formalmente definimos uma <u>k-coloração (de arestas)</u> como uma função $c: E(G) \to [k]$. Os números do contradomínio são chamados de <u>cores</u>.





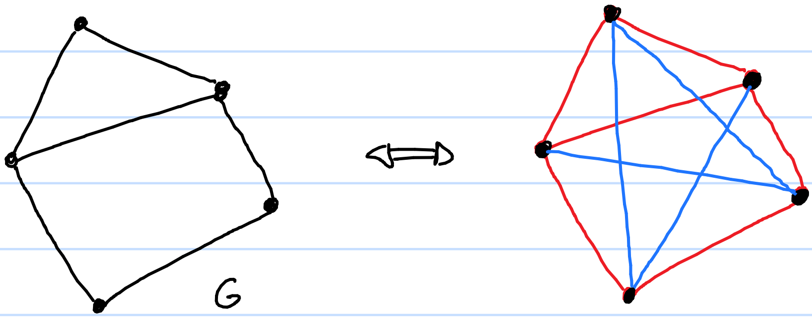
- dizemos que uma k-coloração c é <u>própria</u> se, para todo par de aresta uv, uw, temos que $c(uv) \neq c(uw)$.

arestas que compartilham um extremo.

- Ademais, qndo o número de cores ñ for relevante, simplesmente dizemos que c é uma <u>coloração (de arestas)</u>.

- No caso de 2-colorações, dizemos que as cores utilizadas são o vermelho e o azul.

• Note que podemos associar qualque 2-coloração do K_n a um grafo G com n vértices, em que $E(G)$ são as arestas de K_n com a cor vermelha.



↳ Forma alternativa de olhar G.

<u>Objeto de estudo</u>: estruturas monocromáticas que podem ser encontradas em <u>qualquer</u> coloração com um número fixo de cores.

Proposição 1. Toda 2-coloração das arestas de K_6 possui um triângulo monocromático

→ Já provemos esse resultado na primeira aula em um contexto ligeiramente diferente.

Teo Em uma festa com 6 convidados, há 3 convidados que se conhecem mutuamente, ou três que n̄ se conhecem mutuamente

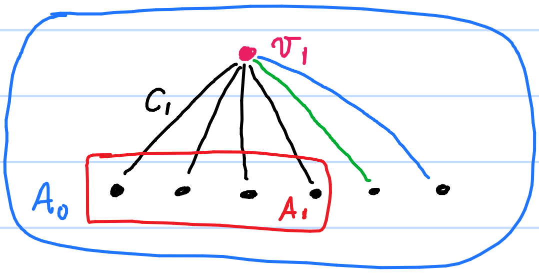
↳ aresta azul: liga dois convidados que se conhecem
aresta vervelha: liga dois convidados que <u>não</u> se conhecem

Teorema 2 (Ramsey, 1930) Para todo $k, r \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que vale o seguinte. Toda r-coloração das arestas de K_n possui uma cópia monocromática de K_k.

Demonstração

- Seja $\chi : E(K_n) \to [r]$ uma r-coloração arbitrária de K_n. Vemos provar que existe uma cópia monocromática
- Seja $A_0 = V(K_n)$
- Seja $v_1 \in A_0$
- Pelo Princípio da Casa dos Pombos generalizado, existe uma cor $c_1 \in [r]$ tal que v_1 é incidente a pelo menos $\frac{(n-1)}{r}$ arestas de cor c_1.
- Seja

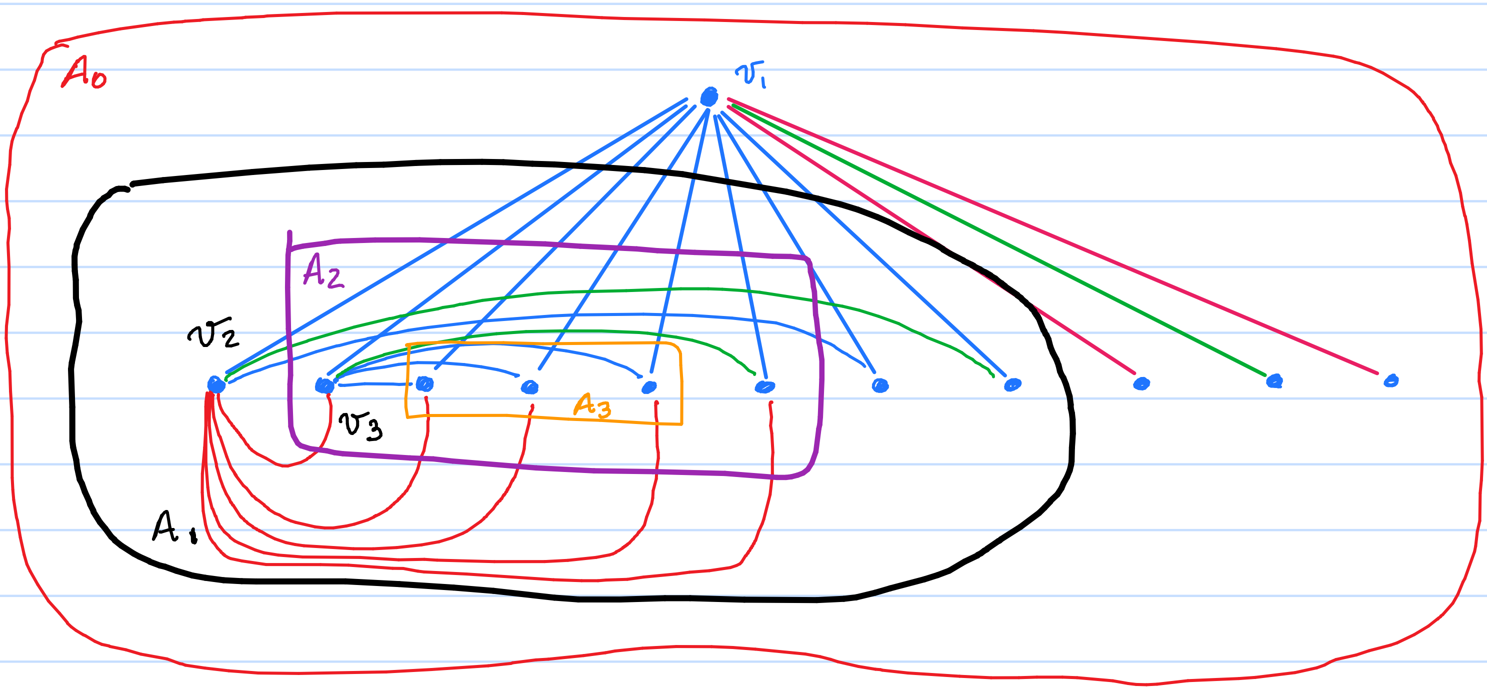
$$A_1 = \{ u \in A_0 : \chi(v_1 u) = c_1 \}$$

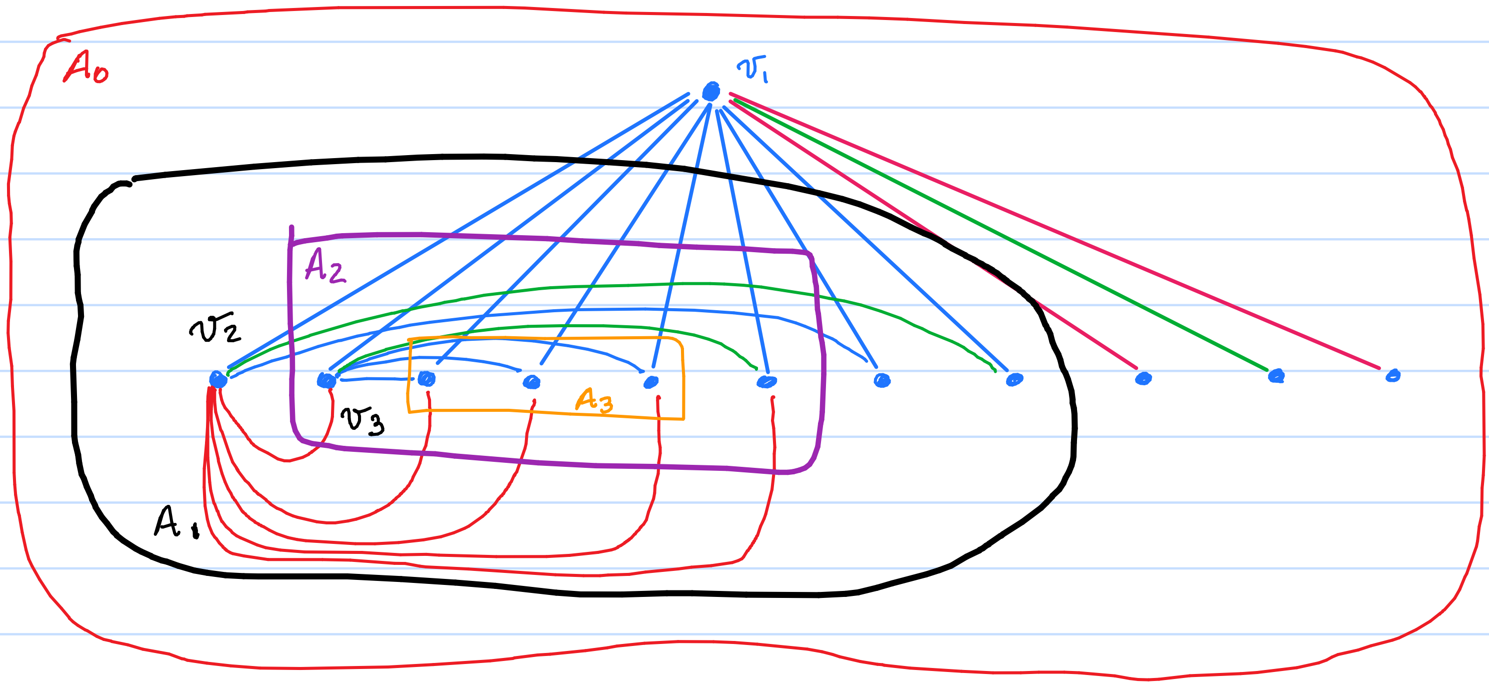


- Claramente $|A_1| \geq \frac{|A_0| - 1}{r} = \frac{n-1}{r}$
- Agora escolha um vértice $v_2 \in A_1$ e repita o processo. Então obtemos uma cor c_2 e um conjunto

$$A_2 = \{ u \in A_1 : \chi(v_2 u) = c_2 \}$$

de tamanho ao menos $\frac{|A_1| - 1}{r}$





- Repetindo essa operação, obtemos uma sequência de vértices $v_1, v_2, \dots, v_t$, cores $c_1, c_2, \dots, c_t \in [r]$ e conjuntos $A_0 \supset A_1 \supset \dots \supset A_t$ tais que $v_i \in A_{i-1}$ e $\chi(v_i u) = c_i$ para todo $i = 1, \dots, t$ e para todo $u \in A_i$. Em particular, note que

$$\chi(v_i v_j) = c_i \quad \text{para todo} \quad i < j \qquad (*)$$

- Como n é suficientemente grande, podemos continuar esse processo até $t \geq rk$.
- Pelo princípio da casa dos pombos generalizado, existe uma cor $c \in [r]$ que aparece ao menos r vezes na sequência $c_1, c_2, \dots, c_t$

As casas são as r cores e os pombos são os c_i's

Bote c_i na casa que representa a cor c_i

imagine que c_i é vermelho, então põe c_i na casa vermelha

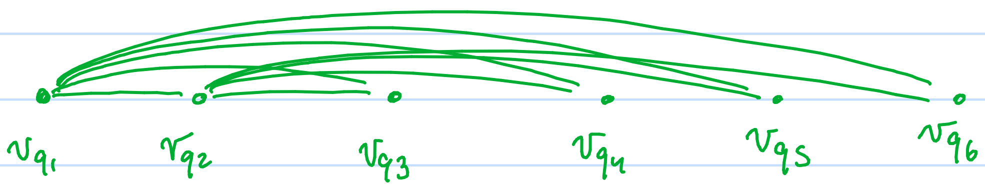
Pelo princípio há uma casa (cor) com ao menos $\frac{t}{r}$ c_i's, ou seja, a cor dessa casa apareceu ao menos $\frac{t}{r}$ vezes na sequência $c_1, c_2, \dots, c_t$

- Seja $S = \{v_i : c_i = c\}$ e note que $|S| \geq \frac{t}{r} \geq k$
- Note que $G[S] \supseteq K_k$ monocromático de cor c.

próxima PG

Seja $S = \{v_{q_1}, v_{q_2}, \dots, v_{q_m}\}$, onde $q_i < q_j$ para $i < j$

Sabemos que $\chi(v_{q_i} v_{q_j}) = c$ para todo $i < j$ (veja $*$)



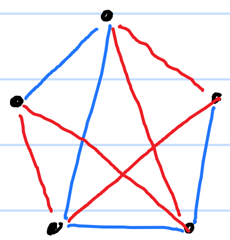
$\square$

Número de Ramsey

- O teorema 2 naturalmente leva à pergunta de encontrar o menor n com a propriedade estudada.

Def. O <u>número de Ramsey</u> $R(k)$ é o menor $n \in \mathbb{N}$ tal que toda 2-coloração de arestas do K_n contém uma cópia monocromática do K_k.

- $R(3) = 6$
  - $\rightarrow$ pela proposição 1 $R(3) \leq 6$
  - $\rightarrow$ Pelo exemplo abaixo $R(3) > 5$



- $R(4) = 18$
- $43 \leq R(5) \leq 48$
- $102 \leq R(6) \leq 161$

Paul Erdős uma vez disse que se derepente uma força alienígena, muito mais poderosa do que nós, pousasse na terra e exigisse de nós o valor de $R(5)$ em um ano ou, caso contrário, eles destruiriam a terra, que a melhor chance da humanidade seria reunir todo o poder computacional da humanidade em um lugar, junto de todos os matemáticos da terra, para em um esforço global conseguir determinar o valor de $R(5)$.
No entanto ele advertiu que se a entidade alienígena pedisse pelo valor de $R(6)$, então a humanidade deveria contra-atacar imediatamente, pois não haveria nenhuma chance de calcularmos o valor de $R(6)$.

macete p/ lembrar a ordem:
Red
~~Green~~
Blue

Def. Dados grafos G, H_1 e H_2, escrevemos

$$G \to (H_1, H_2)$$

com as cores vermelho e azul

para denotar que toda 2-coloração de G contém uma cópia vermelha de H_1 <u>ou</u> uma cópia azul de H_2.

Def. Para todo $s, t \in \mathbb{N}$, definimos

$$R(s,t) = \min \{ n \in \mathbb{N} : K_n \to (K_s, K_t) \}$$

Em particular $R(k) = R(k,k)$.

Lema 3. $R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1)$ para todo $s,t \geq 2$.

Demonstração

- A prova segue por indução em $\ell = s+t$

Base: $\ell = 4$

Se $\ell = 4$, então $s = t = 2$.

Note que $\underbrace{R(2,2)}_{1} \leq \underbrace{R(1,2)}_{1} + \underbrace{R(2,1)}_{1}$

- Seja $n = R(s-1,t) + R(s,t-1)$ e seja χ uma coloração do K_n com as cores vermelha e azul.
- Seja v um vértic do K_n
- Sejam $A = \{ u : \chi(vu) = \text{azul} \}$ e $B = \{ u : \chi(vu) = \text{vermelho} \}$
- Claramente $|A| + |B| = n-1$
- <u>AFIRMAÇÃO</u>: $|B| \geq R(s-1,t)$ ou $|A| \geq R(s,t-1)$
  - Suponha, para uma contradição, que $|B| < R(s-1,t)$ e $|A| < R(s,t-1)$
  - Portanto $|B| \leq R(s-1,t) - 1$ e $|A| \leq R(s,t-1) - 1$
  - Então

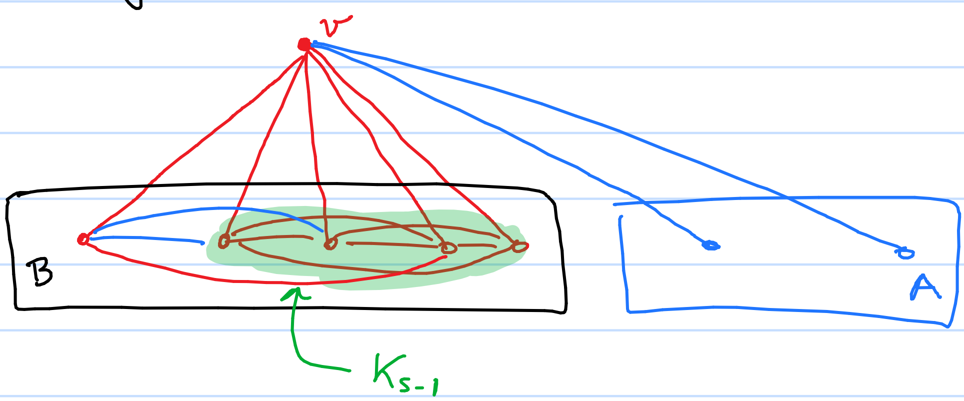
    $n-1 = |A| + |B| \leq R(s-1,t) + R(s,t-1) - 2 = n-2$, um absurdo $\square$
- O restante da prova se divide em dois casos a depende se

  $|B| \geq R(s-1,t)$ ou $|A| \geq R(s,t-1)$.

Caso 1: Primeiro suponha que $|B| \geq R(s-1,t)$

- Assim $G[B] \to (K_{s-1}, K_t)$
- Se existe uma cópia vermelha $K_{s-1} \subseteq G[B]$.

  temos que $G[V(K_{s-1}) \cup \{v\}]$ é uma cópia vermelha do K_s e o resultado segue



- Se existe uma cópia azul $H \subseteq G[B] \subseteq K_n$ do K_t, então o resultado tbm segue

Caso 2: Agora suponha que $|A| \geq R(s,t-1)$

- Assim $G[A] \to (K_s, K_{t-1})$
- Se existe uma cópia azul $K_{t-1} \subseteq G[A]$, então $G[V(K_{t-1}) \cup \{v\}]$ é uma cópia azul do K_t, e o resultado segue
- Se existe uma cópia vermelha $K_s \subseteq G[A] \subseteq K_n$, então o resultado tbm segue $\square$

Teo 4. (Erdős e Szekeres, 1935)

$$R(s,t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$$

para todo $s,t \geq 1$.

Demonstração

- A prova segue por indução em $s+t$
- Base $\min\{s,t\} = 1$
  - Se $\min\{s,t\} = 1$, então
    - Se $s = 1$, então $\binom{s+t-2}{s-1} = \binom{t-2}{0} = 1$
    - Senão $s \geq 2$ e $t = 1$
      - $\binom{s+t-2}{s-1} = \binom{s-1+t-1}{s-1} = \binom{s-1}{s-1} = 1$

  Em ambos os casos temos que o Teorema vale.
- Passo $\min\{s,t\} \geq 2$

  - Pelo Lema 3 e pela H.I. temos

$$R(s,t) \overset{\text{Lema 3}}{\leq} R(s-1,t) + R(s,t-1) \overset{\text{H.I}}{\leq} \binom{s+t-3}{s-2} + \binom{s+t-3}{s-1} = \binom{s+t-2}{s-1}$$

Provamos na aula 1.

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

$\square$

Corolário 5. $R(3,k) \leqslant \binom{k+1}{2}$ para todo $k \geqslant 1$

Teorema 6 (Erdős e Szekeres, 1935) Para todo $k \geqslant 1$,

$$R(k) \leqslant \binom{2k-2}{k-1} \leqslant \frac{4^k}{\sqrt{k}}$$

Demonstração

Pelo teorema 4, temos

$$R(k) = R(k,k) \leqslant \binom{2k-2}{k-1}.$$

$$\boxed{\text{Goal: } \binom{2a}{a} \leqslant \frac{4^{a+1}}{\sqrt{a+1}}}$$

$$\binom{2k-2}{k-1} = \binom{2(k-1)}{k-1} \leqslant \frac{4^{k-1+1}}{\sqrt{k-1+1}} = \frac{4^k}{\sqrt{k}}$$

$\square$

$$\boxed{\text{Goal: } \binom{2a}{a} \leqslant \frac{4^{a+1}}{\sqrt{a+1}}}$$

$$\binom{2n}{n} \leqslant \frac{4^{n+1}}{\sqrt{n+1}} = \frac{(2^2)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} = \frac{2^{2n+2}}{\sqrt{n+1}}$$

$$k! = \left(\frac{k}{e}\right)^k e^{\alpha_k} \sqrt{2\pi k}$$

$$\frac{1}{12k+1} \leqslant \alpha_k \leqslant \frac{1}{12k}$$

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\cdot n!} = \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} e^{\alpha_{2n}} \sqrt{2\pi\, 2n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\alpha_n} \sqrt{2\pi\, n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\alpha_n} \sqrt{2\pi\, n}}$$

$$= \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} e^{\alpha_{2n}}\, \cancel{2}\cdot \cancel{\sqrt{\pi n}}}{\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\alpha_n} \cancel{\sqrt{2}}\, \cancel{\sqrt{\pi n}} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\alpha_n} \cancel{\sqrt{2}} \sqrt{\pi n}}$$

$$= \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} e^{\alpha_{2n}}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} e^{2\alpha_n}\sqrt{\pi n}} = \frac{\frac{2^{2n}\cdot \cancel{n^{2n}}\cdot e^{\alpha_{2n}}}{\cancel{e^{2n}}}}{\frac{\cancel{n^{2n}}\; e^{2\alpha_n}\sqrt{\pi n}}{\cancel{e^{2n}}}} = \frac{2^{2n}\cdot e^{\alpha_{2n}}}{e^{2\alpha_n}\sqrt{\pi n}}$$

$$\leqslant \frac{2^{2n}\, e^{\frac{1}{12\cdot 2n}}}{\sqrt{\pi n}\cdot e^{2/(12n+1)}} \leqslant \frac{2^{2n}\, e^{\frac{1}{24n}}}{\sqrt{\pi n}\; e^{\frac{2}{13n}}} = \frac{2^{2n}\, e^{\frac{13-48}{312n}}}{\sqrt{\pi n}}$$

$$= \frac{2^{2n} e^{-\frac{35}{312n}}}{\sqrt{\pi n}} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}\; e^{35/312n}} \overset{?}{<} \frac{4^n\cdot 4}{\sqrt{n+1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi n}\; e^{35/312n}} < \frac{4}{\sqrt{n+1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi n}\, e^{35/312n}} \overset{?}{<} \frac{4}{\sqrt{n+1}} \iff \frac{1}{4\sqrt{\pi n}\, e^{35/312n}} \overset{?}{<} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\iff \sqrt{n+1} \overset{?}{<} 4\sqrt{\pi n}\, e^{35/312n}$$

Vale para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt{n+1} < \sqrt{4\pi n} \qquad 1 = e^{0} < e^{35/312n}$$

$$n+1 < 4\pi n$$

$$1 < (4\pi - 1)\, n$$

$$\frac{1}{4\pi - 1} < n$$

$\square$

Proposição Desigualdade de Bernoulli

Se $n \in \mathbb{N}$ e $x \geq -1$, então $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

Teo. $e^x \geqslant 1 + x$ para todo $x \in \mathbb{R}$

Demonstração

para valor suficientemente grande de n, temos que $\frac{x}{n} \geq -1$

$$e^x \underset{\text{def.}}{=} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \underset{\text{Bernolli}}{\geqslant} \lim_{n\to\infty} (1+x) = 1 + x$$

$\square$

Teo $\frac{n^n}{e^{n-1}} \leqslant n! \leqslant \frac{n^{n+1}}{e^{n-1}}$

Demo.

- Sabemos que $e^x \geqslant 1 + x$
- Colocando $x = 1/k$, temos que $e^{1/k} \geqslant 1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}$ (A)
- Considere o seguinte produtório

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{(k+1)^k}{k^k} = \frac{\cancel{2^1} \cdot \cancel{3^2} \cdot \cancel{4^3} \cdot 5^4 \cdots \cancel{(n-1)}^{n-2} (n)^{n-1}}{1^1 \cdot \cancel{2^2} \cdot \cancel{3^3} \cdot 4^4 \cdots \cancel{(n-1)}^{(n-1)}} = \frac{n^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-1)} = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{n^n}{n!} \quad \text{(B)}$$

- Além disso, temos

$$e^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} e = \prod_{k=1}^{n-1} \left(e^{1/k}\right)^k \overset{\text{(A)}}{\geqslant} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k \overset{\text{(B)}}{=} \frac{n^n}{n!}$$

- Portanto $e^{n-1} \geqslant \frac{n^n}{n!} \Rightarrow \boxed{n! \geqslant \frac{n^n}{e^{n-1}}}$

- Agora vamos provar que $n! \leqslant \frac{n^{n+1}}{e^{n-1}}$

- Por Stirling, nós temos que

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\alpha_n} \sqrt{2\pi n} \leqslant \frac{n^n}{e^n} e^{\frac{1}{12n}} \sqrt{2\pi n} = \frac{n^n}{e^{n-1}} \cdot \frac{e^{\frac{1}{12n}} \sqrt{2\pi n}}{e}$$

$$\overset{*}{\leqslant} \frac{n^{n+1}}{e^{n-1}}$$

Note que o último passo (*) vale se $\dfrac{e^{\frac{1}{12n}}\sqrt{2\pi n}}{e} \leq n$

$$\frac{e^{\frac{1}{12n}}\sqrt{2\pi n}}{e} \leq n \iff \frac{e^{\frac{1}{12n}}\sqrt{2\pi}\,\cancel{\sqrt{n}}}{e} \leq \sqrt{n}\,\cancel{\sqrt{n}} \iff$$

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{e^{1-1/12n}} \leq \sqrt{n} \iff \sqrt{2\pi} \leq e^{1-1/12n}\sqrt{n}$$

C

Note que $\sqrt{2\pi} \approx 2.506$ e $\sqrt{n} \geq 1$. Ademais, note que se $n \geq 2$, então

$$2.6 \approx e^{\frac{23}{24}} \leq e^{\frac{12n-1}{12n}} = e^{1-\frac{1}{12n}}$$

Portanto, para $n \geq 2$, $\sqrt{2\pi} \leq e^{1-1/12n}\sqrt{n}$, o que implica que o passo (*) vale p/ $n \geq 2$.

- Para concluir o nosso objetivo, ficou faltando apenas o caso $n=1$. Neste caso, fazemos na mão!!

$$n! = 1! = 1$$

$$\frac{n^{n+1}}{e^{n-1}} = \frac{1^2}{e^0} = \frac{1}{1} = 1$$

- Portanto, temos que a desigualdade $n! \leq \dfrac{n^{n+1}}{e^{n-1}}$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Prop. $\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \underset{①}{\leq} \left(\frac{en}{k}\right)^k$, para todo $n,k \in \mathbb{N}$ com $k \leq n$.

Demonstração

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdots (n-k+1)}{k!}$$

Pelo Teorema anterior, temos $\frac{k^k}{e^{k-1}} \leq k! \leq \frac{k^{k+1}}{e^{k-1}}$.

① $$\frac{n \cdots (n-k+1)}{k!} \leq \frac{n \cdots (n-k+1)\, e^{k-1}}{k^k} < \left(\frac{en}{k}\right)^k$$

② $$\frac{n \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))}{k(k-1)(k-2)\cdots\underbrace{(k-(k-1))}_{1}} = \prod_{i=0}^{k-1}\left(\frac{n-i}{k-i}\right) \geq \prod_{i=0}^{k-1}\frac{n}{k} = \left(\frac{n}{k}\right)^k$$

$$\frac{n-i}{k-i} \geq \frac{n}{k} \iff \frac{n-i}{k-i} - \frac{n}{k} \geq 0 \iff \frac{k(n-i) - n(k-i)}{k(k-i)} \geq 0$$

$$\iff \frac{-ik+ni}{k(k-i)} \geq 0 \iff \underbrace{i}_{i \geq 0}\,\underbrace{(n-k)}_{k \leq n \Rightarrow n-k \geq 0} \geq 0 \checkmark$$

$\square$

Prop. $\binom{n}{x}$ é uma função convexa para todo $n \geq x-1$.

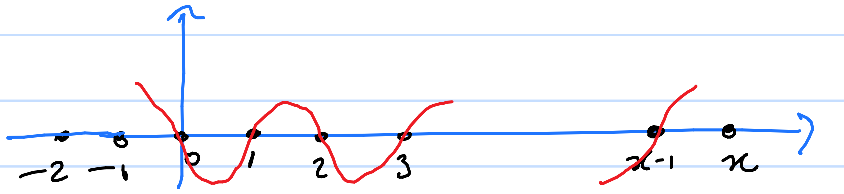
Demonstração

- Por definição $\binom{n}{x} = \dfrac{n!}{x!\,(n-x)!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-x+1)\cancel{(n-x)!}}{x!\ \cancel{(n-x)!}}$

$$= \frac{1}{x!}\prod_{i=0}^{x-1}(n-i)$$

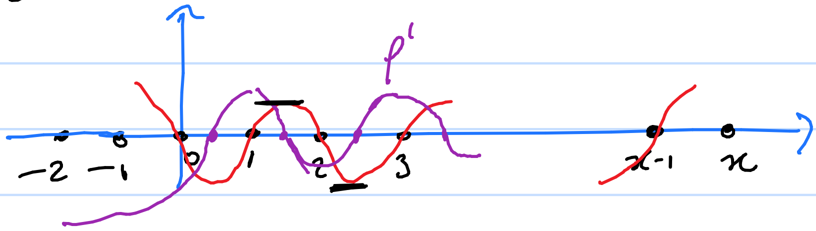
note que isso é uma constante! (estamos olhando o binômio como com x fixo em função de n)

- Então a convexidade/concavidade de $\binom{n}{x}$ será dada por $f(n) = \prod_{i=0}^{x-1}(n-i)$
- Note que $f(n)$ é um polinômio de grau x, portanto, $f(n)$ tem x raizes
- Ademais, note que essas raízes são $\{0, 1, \dots, x-1\}$



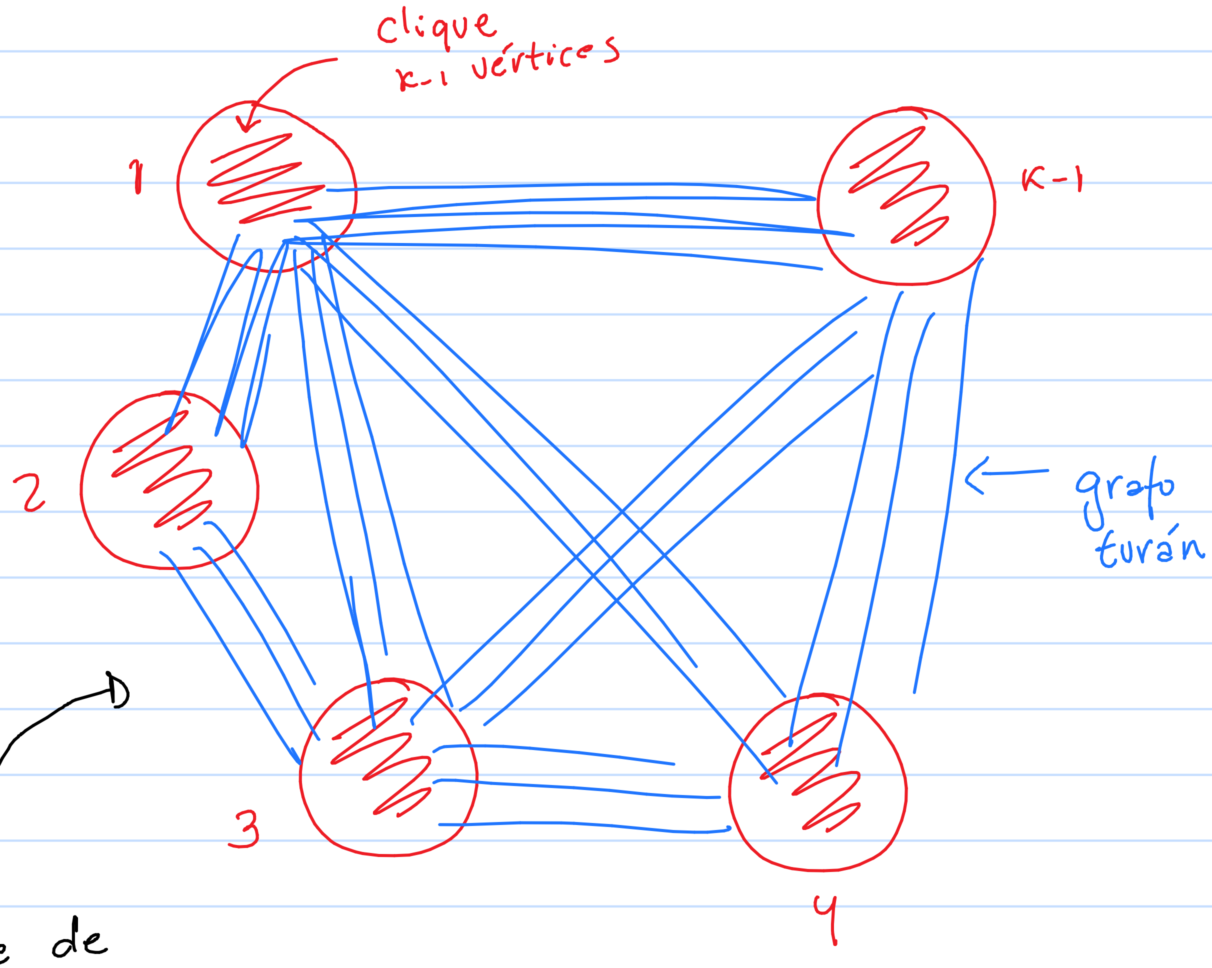
- Sabemos que $f'(n)=0$ para ao menos um valor nos $x-1$ intervalos entre as raizes. Agora note que $f'(n)$ é um polinômio de grau $x-1$, então existe exatamente uma raiz de $f(n)$ em cada um dos intervalos.

f'



- Agora a $f''(n)$ é um polinômio de grau $x-2$ e terá $x-2$ raizes no intervalo $(0, x-1)$
- Assim $f''(n)$ ñ tem raízes em $(-\infty, 0]$ e $[x-1, \infty)$ e portanto será concava ou convexa nesses intervalos.
- Analisando o comportamento de $f(n)$ em dois pontos em cada um desses intervalos nos mostra que
  - $f(n)$ é concava em $(-\infty, 0]$
  - $f(n)$ é convexa em $[x-1, \infty)$.

Limitante inferior R(K)



Livre de
clique monocromática
de tamanho k

"Testemunha" de que $R(k) > (k-1)^2$

- Agora vamos focar em criar um limitante inferior para $R(k)$
  - É muito difícil construir colorações que ñ possuam cópias monocromáticas de grandes cliques
    - A primeira prova foi descoberta apenas em 1981 por Frankl e Wilson
    - Entretanto, Erdős (1947) encontrou uma prova ñ construtiva muito simples

Teo (Erdős, 1947)

$$R(k) \geq 2^{k/2}$$

para todo $k \geq 8$.

Demonstração

- Observe que existem $2^{\binom{n}{2}}$ formas de colorir as arestas de um K_n com duas cores.
- Vamos mostrar que o # de colorações com pelo menos uma clique monocromática de tamanho k é estritamente menor do que $2^{\binom{n}{2}}$
  - ↳ isso implica que existe uma 2-coloração que ñ tem uma clique monocromática de tamanho k
- Vamos dizer que uma coloração é ruim, se ela possui uma clique monocromática de tamanho k.
- Seja $S \subseteq V(K_n)$ e $|S| = k$ $\Rightarrow$ Há $2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2} + 1}$ formas de 2-colorir o K_n tal que $G[S] = K_k$ monocromático.

$$\binom{n}{2} - \binom{k}{2}$$

↳ # de arestas de $E(K_n) \setminus E(G[S])$

$$2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2}} = \text{\# formas de 2-colorir } E(K_n) \setminus E(G[S])$$

$$\underbrace{2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2}}}_{S \text{ é mono vermelho}} + \overbrace{2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2}}}^{S \text{ é mono azul}} =$$

$\hookrightarrow |A \cup B| \leq |A| + |B|$

• Pela cota da união, o número de colorações ruins é no máximo

$$\binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2} + 1}$$

• Assim

$$\binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2} + 1} = 2^{\binom{n}{2} + 1 - \frac{k(k-1)}{2}} \binom{n}{k} \leq 2^{\binom{n}{2} + 1 - \frac{k(k-1)}{2}} \left(\frac{en}{k}\right)^k$$

$$= \frac{2^{\binom{n}{2}+1} \left(\frac{en}{k}\right)^k}{2^{\frac{k(k-1)}{2}}} = 2^{\binom{n}{2}+1} \cdot \left(\frac{en}{k \cdot 2^{\frac{(k-1)}{2}}}\right)^k \leq 2^{\binom{n}{2}+1} \left(\frac{e\sqrt{2}}{k}\right)^k < 2^{\binom{n}{2}}$$

$*$ $n \leq 2^k$

$*$ $\frac{n}{2^{(k-1)}} \leq \frac{2^k}{2^{k-1}} = \sqrt{2}$

$*$ $2\left(\frac{e\sqrt{2}}{k}\right)^k < 1 \iff 2(e\sqrt{2})^k < k^k$

$2(e\sqrt{2})^k \overset{?}{<} k^k \iff$

$(\sqrt[k]{2}\, e\sqrt{2})^k < k^k$

$\iff$

$\sqrt[k]{2}\, e\sqrt{2} < k$

$\sqrt[k]{2}\, e\sqrt{2} \leq \sqrt[5]{2}\sqrt{2}\, e = 4.41$

$< k$

Vamos provar $2(e\sqrt{2})^k < k^k$ por indução

Base: $k = 5$

$2(e\sqrt{2})^5 \approx 1679$

$5^5 \approx 3125$

$2(e\sqrt{2})^{k-1} < k^{k-1}$

Passo: $k \geq 6$

$2(e\sqrt{2})^k = 2(e\sqrt{2})^{k-1}(e\sqrt{2}) < k^{k-1}(e\sqrt{2})$ ≈ 3.8

$< k^{k-1} \cdot 6 \leq k^k$

$\square$

$\boxed{\text{Bom momento p/ contar a piada da lata de feijão.}}$

- Tal prova foi uma das primeiras aplicações do que hoje é conhecido como método probabilístico
- Na linguagem de probabilidade a prova pode ser descrita de forma mais sucinta:
  - Colorimos o grafo de forma aleatória
  - O cálculo feito anteriormente mostra que, para uma coloração escolhida ao acaso, o número esperado de k-cliques monocromáticas é menor que 1 e, portanto, a probabilidade de uma coloração aleatória ser boa é positiva.

- A construção de Frankl e Wilsom (1981), que nos dá um limitante inferior super polinomial (i.e. $\omega(m^k)$) para $R(k)$ é a seguinte:
  - $m \in \mathbb{N}$ e $q = p^k$, onde p é primo, $m \geq q^2 - 1$
  - Seja G o grafo tal que $V(G) = \binom{[m]}{q^2-1}$
  - $\chi : E(G) \to \{\text{vermelho}, \text{Azul}\}$ tal que o conj. das arestas vermelhas é

$$\{ST : |S \cap T| \equiv -1 \pmod q\}$$

É possível mostrar que essa coloração ñ possui cliques monocromáticas com mais de $\binom{m}{q-1}$ vértices (isto ñ é fácil).

O limitante superior para $R(k)$ foi melhorado:
- Thomason (88): por um fator de $\sqrt{k}$
- Colon (09): por um fator superpolinomial
- Sah (20): melhorou o resultado de Colon provando que

$$R(k) \leq \frac{1}{k^{c \log k}} \cdot 4^k \quad \text{para algum } c > 0$$

- Marcelo Campos (IMPA), Rob Morris (IMPA), Simon Griffths (PUC-Rio) e Julian Sahasrabudhe (Cambridge)

- Marcelo Campos (IMPA), Rob Morris (IMPA), Simon Griffths (PUC-Rio) e Julian Sahasrabudhe (Cambridge): 2023

→ Em uma palestra no dia 16/03/23 que ocorreu de forma simultânea na USP (São Paulo), IMPA (Rio), e Cambridge (Inglaterra) com o título misterioso: "Recent progress in an old problem of Erdos".

$$R(k) \leq 3.993^k$$

$$4^k = \alpha\, 3.993^k$$
$$\alpha = \left(\frac{4}{3.993}\right)^{k}$$

→ Fator exponencial.

- Já o limitante inferior para $R(k)$ dado por Erdos só foi melhorado por um fator de 2 até hoje!

- Os limitantes ficam bem piores qndo permitimos mais de duas cores.

- O <u>número de Ramsey para r cores</u>, denotado por $R_r(k)$, é o menor $n \in \mathbb{N}$ tal que toda r-coloração das arestas do K_n contém uma cópia monocromática de K_k.

  → Mesmo qndo $r=3$, temos que o melhor limitante superior conhecido é super exponencial em r

Teo 4.1.6 Para todo $r \geq 2$

$$2^r < R_r(3) \leq 3r!$$

Demonstração

- Primeiro vamos provar o limitante superior por indução em r
- Seja $n = 3r!$

Base $r=2$

$$R_2(3) = 6 = 3 \cdot 2! = 3r! = n$$

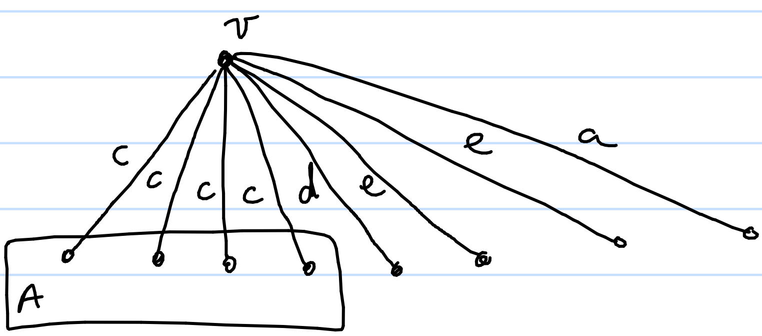
Passo $r \geq 3$

- Seja v um vértice do K_n
- Seja χ uma r-coloração de $E(K_n)$
- Pelo princípio generalizado da casa dos pombos existe uma cor c que aparece $3(r-1)!$ vezes em $E(v)$

$E(v) \to \{u : uv \in E(K_n)\}$

$$\frac{3r! - 1}{r} = \frac{3r!}{r} - \frac{1}{r} = 3(r-1)! - \frac{1}{r}$$

Como o número de ocorrências dessa cor é um inteiro, temos que o valor é $\geq 3(r-1)!$



- Seja $A = \{u : \chi(vu) = c\}$ e note que $|A| \geq 3(r-1)!$ (*)
- Se existe uma aresta xy em $G[A]$ tal que $\chi(xy) = c$, então o resultado segue.
- Senão, χ restrito à $G[A]$ é uma $r-1$ coloração.
- Por H.I. $R_{r-1}(3) \leq 3(r-1)!$
- Logo existe um triângulo monocromático em $G[A]$ por causa de (*)

- Agora vamos provar o limitante inferior.
- Faremos isso novamente por indução em r

<u>Base $r = 1$</u>

$$2^r = 2^1 = 2 < 3 = R_r(3)$$

<u>Passo $r \geq 2$</u>

- Seja $n = 2^r$
- Divida os vértices do K_n em dois conjuntos disjuntos A e B de tamanhos $\frac{2^r}{2}$.
- Por H.I. $2^{r-1} < R_{r-1}(3)$
- Assim existem $(r-1)$-colorações χ_A e χ_B do $G[A]$ e $G[B]$, respectivamente, livre de triângulo monocromático.
- Agora pinte $E(A,B)$ com a cor r
- A coloração resultante desse procedimento é livre de triângulo monocromático $\square$

Número de Ramsey para grafos arbitrários

O **número de Ramsey de H_1 versus H_2** é definido como

$$r(H_1,H_2) = \min\{ n \in \mathbb{N} : K_n \to (H_1, H_2)\}$$

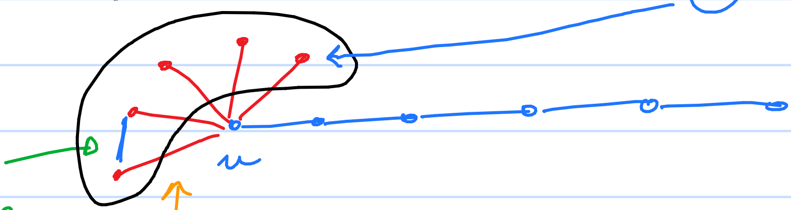
Teo. $r(K_3, P_k) = 2k+1$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração

- $r(K_3,P_k) > 2k$: exibimos coloração do K_{2k} sem K_3 vermelho e P_k azul
  - Seja $n = 2k$
  - Particione os vertices do K_n em dois conj. A e B de tamanho k
  - Pinte $G[A]$ e $G[B]$ de azul.
    - ↳ maior caminho azul $k-1$ arestas
  - Pinte $E(A,B)$ de vermelho
    - ↳ Bipartido $\Rightarrow \not\exists$ tem triângulos

- $r(K_3,P_k) \leq 2k+1$
  - Seja $n = 2k+1$ e χ uma 2-coloração qualquer do K_n
  - Seja P um caminho maximal azul em K_n e seja t o comprimento de P
  - $t \leq k-1$, senão acabou a prova
  - Seja u um extremo de P

③ os vértices fora do caminho formam uma clique azul por causa de ②



② precisa ser azul, caso contrário acabou a prova.

① precisam ser vermelhas pela maximalidade de P

$\Downarrow$

Há pelo menos $k+1$ vértices na clique azul $\Rightarrow \exists$ caminho azul de compr. k nesse clique

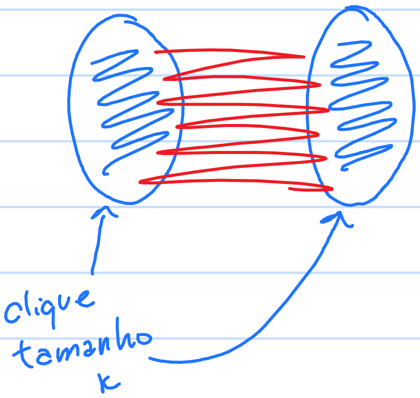
Teo. 4.3.3 Seja $k \in \mathbb{N}$ e seja T uma árvore com k arestas. Então

$$r(K_3, T) = 2k+1$$

$k+1$ vértices

Demonstração

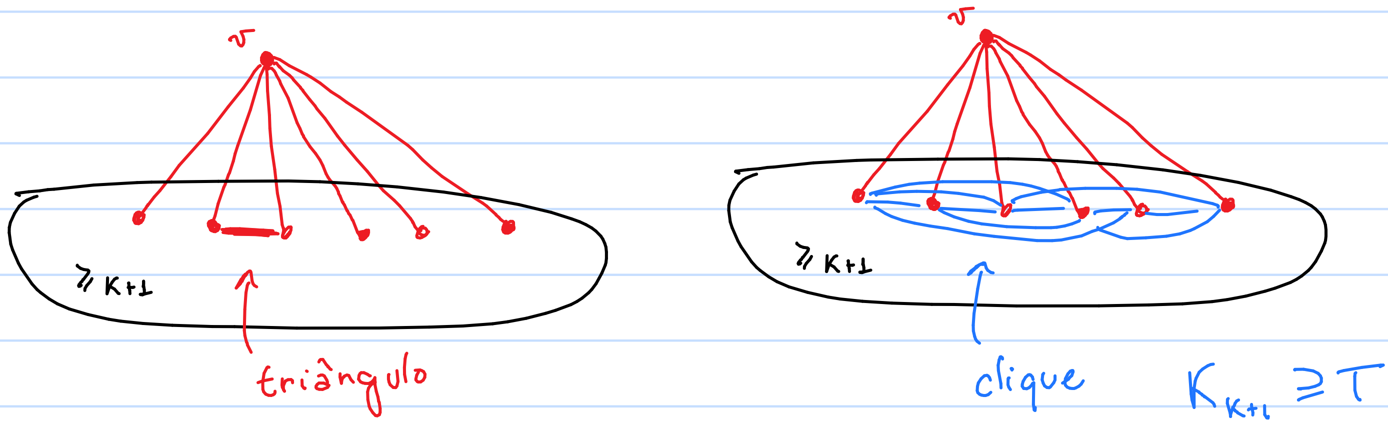
- Limite inferior



bicoloração de um grafo com $2k$ vértices que ñ tem cópia vermelha do triângulo e nem azul de T.

$\Rightarrow r(K_3, T) > 2k$

- Limite superior
  - Seja $n = 2k+1$
  - Seja χ uma bicoloração de K_n
  - Caso: $\exists\, v \in V(K_n)$ t.q. grau vermelho $\geq k+1$



- Caso: $\nexists\, v \in V(K_n)$ t.q. grau vermelho $\geq k+1$.
  - todo vértice tem grau vermelho $\leq k$.
    $\Rightarrow$ todo vértice tem grau azul $\geq k$.
  - Seja H o subgrafo induzido pelas arestas de cor azul.

> **Lema 1.** Seja $k \in \mathbb{N}$ e seja T uma árvore com $k+1$ vértices. Se G é um grafo com $\delta(G) \geq k$, então $T \subseteq G$.

árvore azul

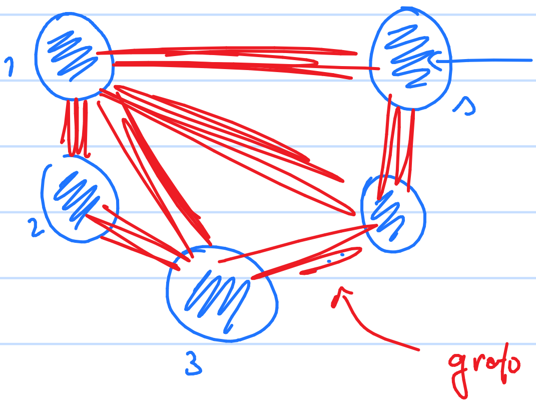
- Pelo lema anterior, $T \subseteq H \subseteq K_n$.

Teo Seja $k, s \in \mathbb{N}$ e seja T uma árvore com k arestas. Então
$r(K_{s+1}, T) = sk+1.$ ↳ $k+1$ vértices

Demonstração

- Limitante inferior

K_{sk}

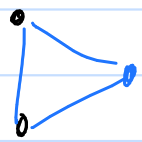


s cliques de tamanho k

grafo vermelho s-partido $\nexists K_{s+1}$

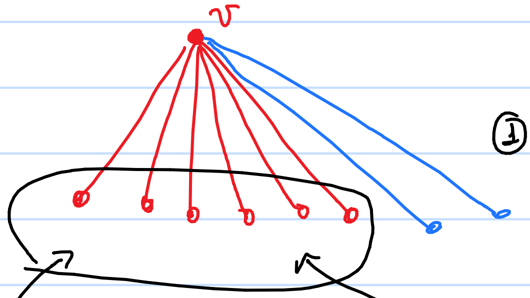
- A prova do limitante superior segue por indução em s
- Base $s=1$

$$r(K_{s+1}, T) = r(K_2, T) = \underbrace{k+1}_{\to\, k \text{ arestas} \Rightarrow k+1 \text{ vértices}} = 1\cdot k+1 = sk+1$$



- Passo $s>1$

- Seja $n = sk+1$ e seja χ uma bicoloração do K_n.
- Caso: $\exists\, v \in V(K_n)$ t.q. grau vermelho $\geq (s-1)k+1$



① Por H.I. $r(K_s, T) = (s-1)k+1$

$\geq (s-1)k+1$

② tem K_s vermelho ou T azul
↳ $K_s \cup \{v\} \Rightarrow K_{s+1}$ vermelho.

- Caso: $\nexists\, v \in V(K_n)$ t.q. grau vermelho $\geq (s-1)k+1$
  - $\forall\, v \in V(K_n)$ $d_V(v) \leq (s-1)k \Rightarrow$ $d_A(v) \geq k$

grau vermelho de v

grau azul de v

$$\boxed{\begin{aligned} sk = d(v) &= d_A(v) + d_V(v) \\ &\leq d_A(v) + (s-1)k \\ sk - (s-1)k &\leq d_A(v) \\ (s-s+1)k &\leq d_A(v) \\ k &\leq d_A(v) \end{aligned}}$$

- Seja H o grafo induzido pelas arestas azuis
  - $\delta(H) \geq k$

> **Lema 1.** Seja $k \in \mathbb{N}$ e seja T uma árvore com $k+1$ vértices. Se G é um grafo com $\delta(G) \geq k$, então $T \subseteq G$.

- Pelo lema anterior, $T \subseteq H \subseteq K_n$ $\square$

Quando $H_1 = H_2$, escrevemos $G \to H_1$ ao invés de $G \to (H_1, H_2)$ e $r(H_1)$ ao invés de $r(H_1, H_2)$.

Teorema (Gerencsér e Gyárfás, 1967)

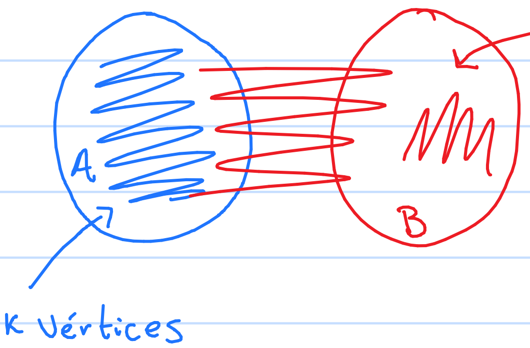
$$r(P_k) = \left\lceil \frac{3k}{2} \right\rceil$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração

- <u>Limitante inferior</u>

- $n = \left\lceil \frac{3k}{2} \right\rceil - 1$
- Vamos pintar o K_n da seguinte forma:
- seja $A \subseteq V(K_n)$ t.q. $|A| = k$ e seja $B = V(K_n) \setminus A$

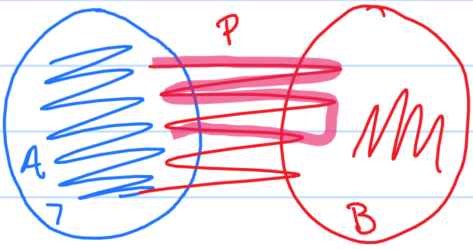


$\left\lceil \frac{3k}{2} \right\rceil - 1 - k$ vértices

$= \left\lceil \frac{3k}{2} - \frac{2k}{2} \right\rceil - 1 = \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil - 1$

$\overset{*}{<} \frac{k}{2}$

- ñ há P_k azul
  - ↳ # de arestas
- ñ há P_k vermelho



* Se k é par

$\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil - 1 = \frac{k}{2} - 1 < \frac{k}{2}$

* Se k é ímpar

$\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil - 1 = \frac{k+1}{2} - 1 = \frac{k-2}{2} < \frac{k}{2}$

- Seja P um caminho vermelho
- Note que se $uv \in E(P) \Rightarrow u \in B$ ou $v \in B$ (ou ambos)
- Assim $e(P) \leq 2|B| < 2\frac{k}{2} = k$

- Isso mostra que $r(P_k) \geq \left\lceil \frac{3k}{2} \right\rceil$

- Para provar o limitante superior, vamos provar um resultado mais geral

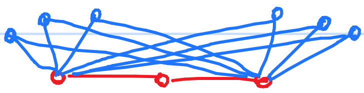
Se $k \geq \ell \geq 1$ e $n \geq k + \lceil \ell/2 \rceil$, então $K_n \to (P_k, P_\ell)$

Então qndo $k = \ell$, temos o resultado que queremos, pois

se $n \geq k + \lceil k/2 \rceil = \lceil 3k/2 \rceil$, então $K_n \to (P_k, P_k)$

- A prova segue por indução em $\ell + k$
- Base $\ell \leq 3$

- Pegue um caminho vermelho maximal P



P

- Se $e(P) \geq k$, acabou
- Se $e(P) < k$
  - $n \geq k + \lceil \ell/2 \rceil$

$$v(P) = e(P) + 1 < k + 1$$

$$v(P) \leq k$$

$$-v(P) \geq -k$$

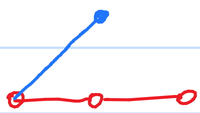
$$n - v(P) \geq k + \lceil \ell/2 \rceil - v(P) \geq k + \lceil \ell/2 \rceil - k = \lceil \ell/2 \rceil$$

Se $\ell = 1 \Rightarrow n - v(P) \geq 1$

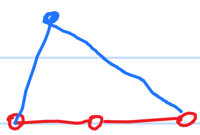
Se $\ell = 2 \Rightarrow n - v(P) \geq 1$

Se $\ell = 3 \Rightarrow n - v(P) \geq 2$

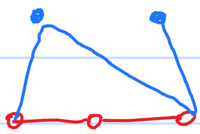
Em todos os casos conseguimos achar o P_ℓ azul



$\ell = 1$



$\ell = 2$

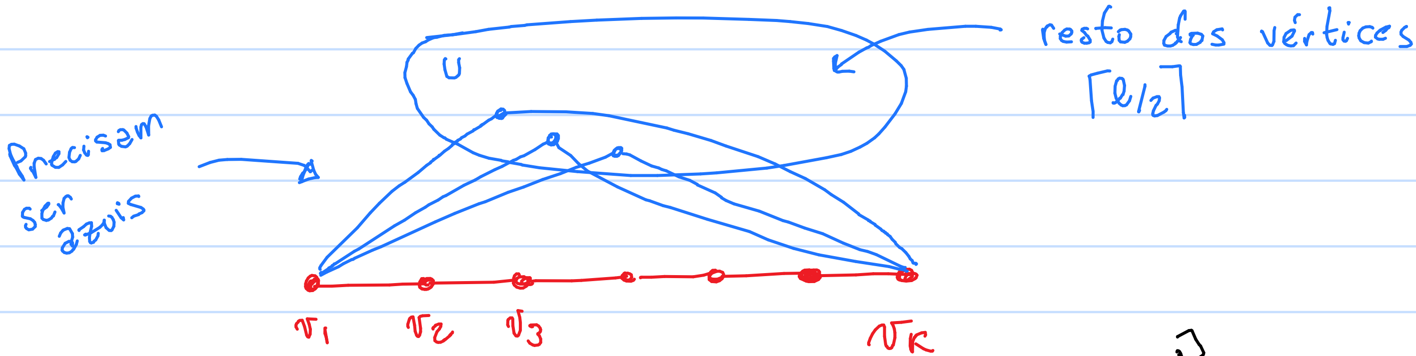


$\ell = 3$

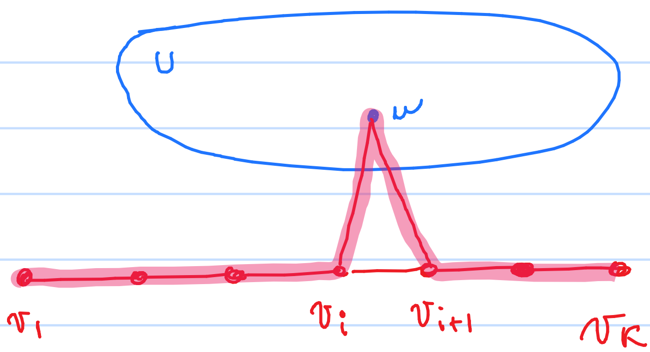
Passo: $k \geq l \geq 4$

- Seja $n = k + \lceil l/2 \rceil$ e seja χ uma bicoloração do K_n

- Caso $k > l$
  - Se existe uma cópia vermelha do P_k, o resultado segue.
  - Então podemos assumir que um caminho vermelho tem comprimento no máximo $k-1$.
  - Por H.I., temos $K_n \to (P_{k-1}, P_l)$, pois $k-1+l < k+l$
  - Se existe cópia azul de P_l, o resultado segue
  - Então seja $P = v_1 \dots v_k$ um caminho vermelho de comprimento $k-1$ na coloração χ do K_n
  - Seja $U = V(K_n) \setminus V(P)$ e note que $|U| = \lceil l/2 \rceil$



- Além disso, podemos assumir que, para cada $u \in U$ e $i \in [k-1]$, ao menos uma aresta de $E(u, \{v_i, v_{i+1}\})$ é azul, caso contrário podemos encontrar um caminho vermelho de comprimento k

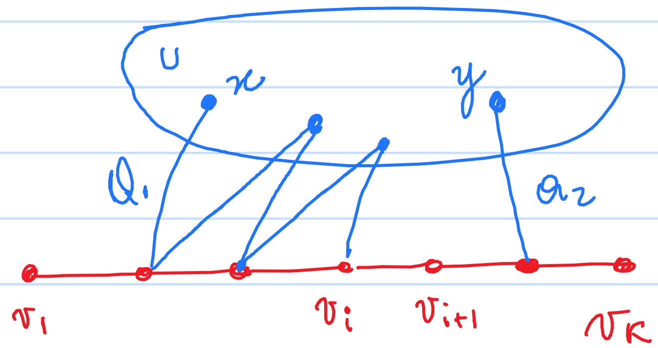


- Sejam Q_1 e Q_2 caminhos azuis vertice-disjuntos de comprimento ímpar cujos vértices alternam entre U e o conjunto $\{v_2, \dots, v_k\}$. ↳ $V(Q_1) \cap V(Q_2) = \emptyset$

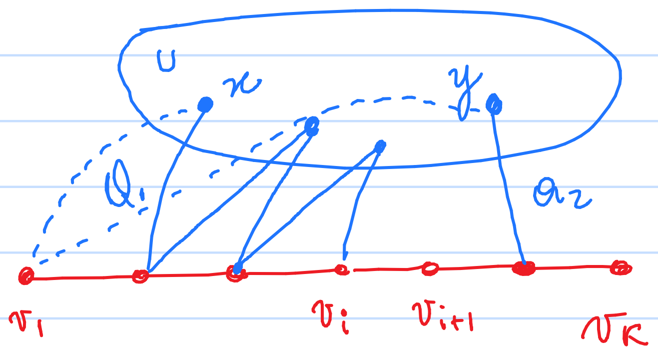
  Além disso, vamos assumir que Q_1 é maximal e, sujeito a isso, que Q_2 tbm é maximal

  → Note que cada um desses caminhos Q_1 e Q_2 tem no máximo um extremo em U, pq são caminhos de comprimento ímpar.

  → Seja x o extremo de Q_1 em U e y o extremo de Q_2 em U



<u>Subcaso: $V(Q_1) \cup V(Q_2) = U$</u>



$T = Q_1 \cup Q_2 \cup x v_1 y$ é um caminho azul tal que

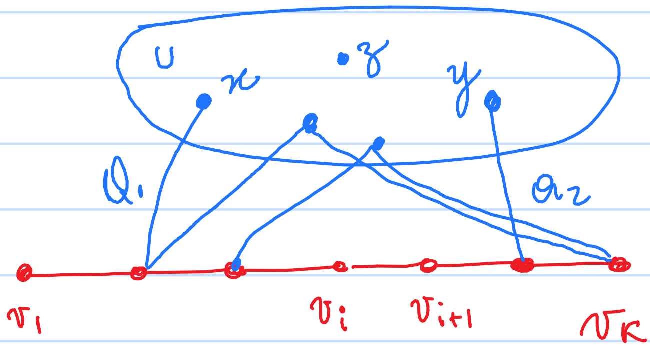
$$e(T) = 2|U| = 2\left\lceil \frac{\ell}{2} \right\rceil \geq \ell$$

Então temos a cópia azul de P_ℓ

Subcaso: $V(Q_1) \cup V(Q_2) \neq U$

- Existe $z \in U$ tal que $z \notin V(Q_1) \cup V(Q_2)$ ← vamos usá-lo para encontrar uma contradição

- Pela maximalidade de Q_1, $v_k \in V(Q_1)$

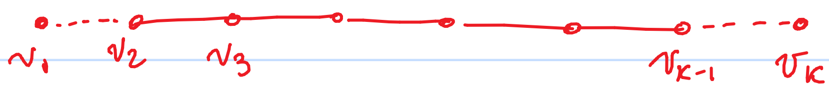


- $Q_1 \cup Q_2$ contém no máximo $|U|-1 < (k-1)/2$ vértices de P

$$|U|-1 = \left\lceil \frac{\ell}{2} \right\rceil - 1 \leq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil - 1 \underset{*}{\leq} \frac{k-1}{2}$$

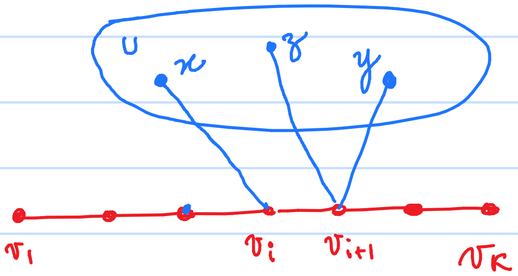
$*$ Se k é par
$$\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil - 1 = \frac{k}{2} - 1 = \frac{k-2}{2} < \frac{k-1}{2}$$
Se k é ímpar
$$\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil - 1 = \frac{k+1}{2} - 1 = \frac{k-1}{2}$$

- Portanto existe um $i \in \{2, \ldots, k-2\}$ tal que $v_i v_{i+1} \notin V(Q_1) \cup V(Q_2)$

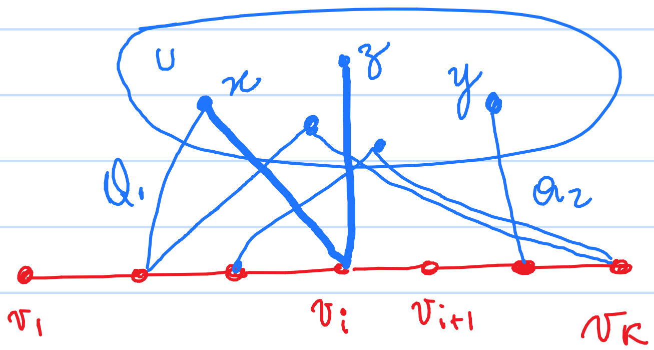


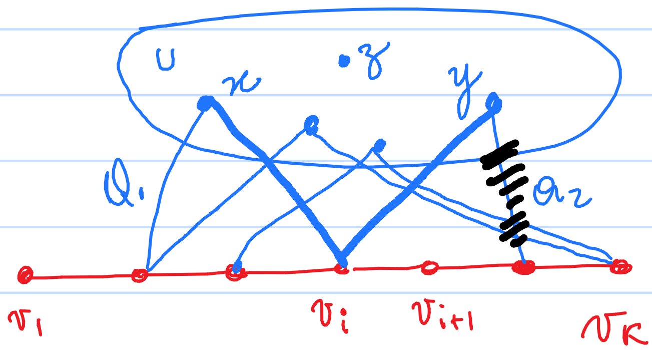
- \# de intervalos $v_i v_{i+1}$ consecutivos: $k-1-2 = k-3$
- $\left| [V(Q_1) \cup V(Q_2)] \cap V(P - v_k) \right| < \frac{k-1}{2} - 1 = \frac{k-3}{2}$
- Logo $\exists\, i \in \{2, \ldots, k-2\}$, tal que $v_i, v_{i+1} \notin V(Q_1) \cup V(Q_2)$

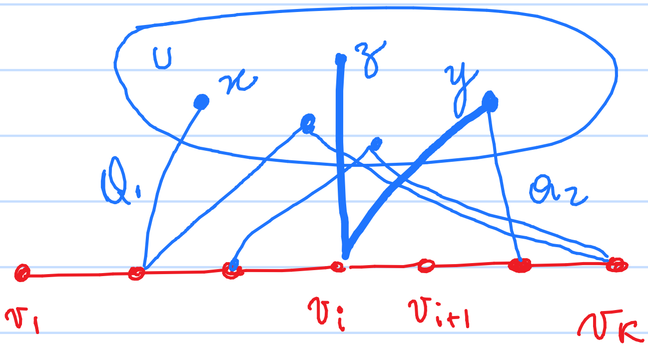
- v_i ou v_{i+1} envia duas arestas para o conjunto $\{x, y, z\}$



- Podemos estender Q_1 ou Q_2 com a ajuda dessas duas arestas







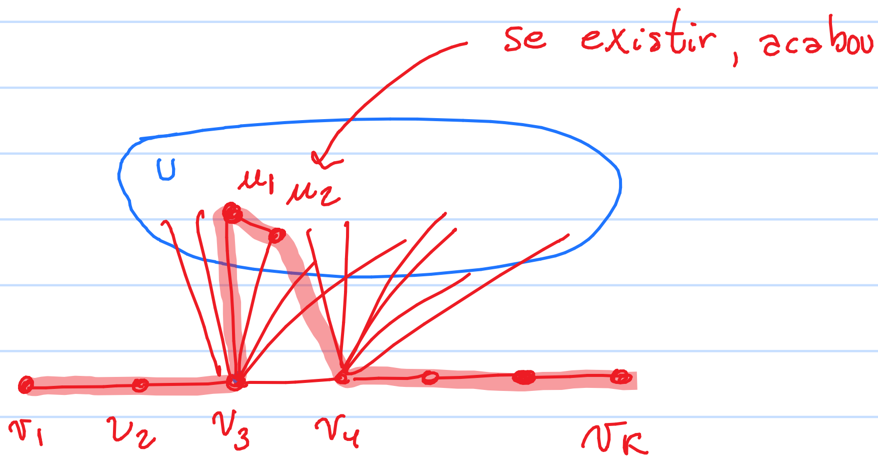
- isso completa o caso $k > \ell$

<u>Caso $k = \ell$</u>

* Similar, mas um pouco mais delicado, com alguns casos extras.

(Exercício) □

* Caso todas as arestas $E(\{v_2, v_4\}, U)$ sejam vermelhas



* Então